MPSI

DS de mathématiques n°5

17 jan. 2025

Continuité, dérivation, convexité, relations, arithmétique

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté de la copie pourra faire varier la note de ±1 point.

1 Pour s'échauffer

Les questions ***1)*** *et* ***2)*** *de cet exercice sont indépendantes.*

1) **a)** Déterminer le PGCD de 56 et de 99, ainsi qu'un couple de coefficients de Bézout. *Si ces coefficients n'ont pas été trouvés, on pourra les noter u et v pour la question suivante.*

b) En déduire les solutions de $56x + 99y = 1$.

2) On note f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Étudier la convexité ou la concavité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire que pour tous $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n + \sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{1+x_i}$

2 Fonctions absolument monotones

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in]a,b[\qquad f^{(n)}(x) \geq 0$$

Partie A – Généralités

1) Justifier que toute application absolument monotone est positive, croissante et convexe. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante.

2) Soit f et g deux fonctions absolument monotones sur $]a,b[$. Montrer que $f+g$ et fg le sont aussi.

3) Dans la suite, on note e^f l'application $x \mapsto e^{f(x)}$. Justifier que e^f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer $(e^f)'$.

4) En utilisant une récurrence forte et le fait que $(e^f)^{(n+1)} = ((e^f)')^{(n)}$, montrer que si f est absolument monotone sur $]a,b[$, alors e^f l'est aussi.

5) En déduire que la fonction $\varphi : x \mapsto e^{1+2x+3x^2}$ est absolument monotone sur $]0,1[$.

Partie B – La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$

6) On pose $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$

$$u^{(n)}(x) = \alpha_n \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

où α_n est un réel qui dépend de n que l'on précisera.

7) Donner sans justification une formule pour $v^{(n)}(x)$, où $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

8) En déduire que l'application $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

est absolument monotone sur $]0,1[$.

9) Montrer que l'application $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\quad h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad$ est absolument monotone sur $]0,1[$. *On pourra considérer $f = \ln \circ h$ et calculer f'.*

10) En déduire que l'application arcsin est absolument monotone sur $]0,1[$.

Partie C – Prolongement d'une application absolument monotone

On suppose que $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est absolument monotone sur $]a,b[$.

11) Montrer que f est prolongeable par *continuité* en a. On note encore f la fonction ainsi prolongée. Montrer également que $f(a) \geq 0$.

12) Justifier que f' admet une limite en a. En déduire que f est dérivable en a et que $f'(a) \geq 0$.

13) Est-ce que f est prolongeable par continuité en b ?

3 Nombres de Mersenne

Soit x et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1) **a)** Déterminer un entier b tel que $\quad x^m - 1 = (x-1)b$

b) En déduire que si $x^m - 1$ est premier, alors $x = 2$.

2) **a)** Soit p et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

b) En déduire que si $2^m - 1$ est premier, alors m est premier.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = x^n - 1$. Soit a et b dans $\mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que u_r est le reste de la division euclidienne de u_a par u_b.

4 Une relation d'ordre sur les relations d'ordre

Soit E un ensemble. On note $O(E)$ l'ensemble de toutes les relations d'ordre définies sur E. On définit la relation $\preceq$ sur $O(E)$ de la manière suivante : pour toutes relations d'ordre $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ dans $O(E)$:

$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}_1 y \implies x\mathcal{R}_2 y$$

Autrement dit, si x et y sont comparables pour $\mathcal{R}_1$, ils le sont aussi pour $\mathcal{R}_2$ et dans le même sens. On dit alors que $\mathcal{R}_2$ est **plus fine** que $\mathcal{R}_1$ car elle permet de comparer plus d'éléments. Enfin, on dit que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ si pour tous $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}_1 y \iff x\mathcal{R}_2 y$.

1) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $O(E)$.

2) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre total de $O(E)$. Montrer que si une relation $\mathcal{R}'$ est plus fine que $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$.

3) Que doit vérifier une relation $\mathcal{E}$ pour être le plus petit élément de $O(E)$? Montrer que $O(E)$ admet effectivement un plus petit élément $\mathcal{E}$ et le déterminer. *Indication : $\mathcal{E}$ est donc la moins fine des relations d'ordre sur E, celle qui permet de comparer le moins d'éléments possibles...*

Blague : Quel est le second prénom de Benoit B. Mandelbrot ? Réponse : Benoit B. Mandelbrot.